



## University of the Pacific Scholarly Commons

---

Euler Archive - All Works

Euler Archive

---

1780

# De altitudine columnarum sub proprio pondere corruentium

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

---

### Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De altitudine columnarum sub proprio pondere corruentium" (1780). *Euler Archive - All Works*. 510.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/510>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

DE  
ALTITVDINE COLVMNARUM  
SVB PROPRIO PONDERE  
CORRVNTIVM.

Auctore  
L. EVLERO.

§. 1.

Cum nuper hanc quaestionem resolvere essem conatus Tab. IV.  
pro curua, ad quam columnam ante inflecti conce- Fig. 1.  
pi, quam frangeretur, inter abscissam verticalem  $AX = x$   
et applicatam horizontalem  $XY = y$ , hanc inueneram ae-  
quationem:  $\int x dy + \frac{E ddy}{dx^2} = 0$ ; vbi littera E momentum  
elasticitatis, quo columna inflexioni resistit, complectitur,  
vnde valor ipsius  $y$  per sequentem seriem infinitam ex-  
primebatur:

$$\frac{y}{A} = x - \frac{1 \cdot x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot E} + \frac{1 \cdot 4 \cdot x^8}{2 \cdot \dots \cdot 7 \cdot E^2} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot x^{10}}{2 \cdot \dots \cdot 10 \cdot E^3} + \text{etc.}$$

Hinc porro per constructionem nata est linea curua figu-  
rae prorsus mirabilis, innumerabiles applicatas, tam maxi-  
mas quam minimas, continens, quae autem omnes ad ean-  
dem partem axis verticalis sitae videbantur, ita vt ista  
curua non nisi in infinitum continuata in ipsum axem inci-  
deret; quae circumstantia me seduxerat quasi, vt arbitrarer,  
columnarum altitudinem adeo sine periculo fractionis in  
infinitum augere posse. Postmodum vero ex aliis princi-  
piis

piis clarissime ostendi, rem aliter se habere, et pro quovis columnarum robore certam altitudinem assignari posse, quam si superent, certe proprio ponderi succumbent.

§. 2. Cum autem aequatio ex certissimis principiis aequilibrii sit deducta, nullius erroris coargui potest, si modo omnes rationes, quibus innititur, probe perpenduntur, nullaeque circumstantiae immisceantur ipsis principiis huius calculi contrariae; quamobrem, antequam hinc conclusiones deducere liceat, omnia momenta, ex quibus ista singularis figura est deducta, accurate evolueri oportet. Ac primo quidem supremus columnae terminus A nulli prorsus actioni cuiusquam vis subiectus est assumptus, ita ut liberrime de suo loco moveri et reliquis viribus cedere posset, quae circumstantia iam a statu, quem in nostra quaestione contemplamur, prorsus discrepat. Quando enim quaerimus, in quanta altitudine columnae etiamnunc proprium pondus sustinere valeant, manifesto supponimus, supremum terminum A, perinde ac infimum B, constanter in eadem recta verticali AB retineri, neque ab actione virium, quibus pars media incurvatur, de hoc situ dimoveri posse. Sin autem ista circumstantia praetermitteretur et supremo termino A plena libertas relinqueretur, nihil prorsus absurdi in illa curva mirabili deprehenderetur, sed potius semper eiusmodi casus assignari poterunt, quae cum ista curva pulcherrime conveniant, id quod paucis ostendere operae erit pretium.

§. 3. Ante omnia autem hic loco columnarum laminae elasticae eiusdem roboris, mente saltem, substitui

tui conueniet: semper enim concipi potest lamina elastica, quae inflexioni tantum reluctetur, quantum columna fractioni resistit; totum autem discrimen in eo erit positum, quod lamina elastica a viribus sollicitantibus reuera incurvetur, dum columna, ab iisdem viribus sollicitata, disrumpitur. Hoc praemonito semper eiusmodi lamina elastica concipi poterit, quae, a solo suo pondere sollicitata, ad eam ipsam curuam inflecti atque adeo in aequilibrio consistere queat, quam ex aequatione initio allata deduximus; si modo obseruemus, in calculo illo omnes huius curuae applicatas  $XY$  tanquam infinite paruas spectari debere, etiamsi in nostra figura multo maiores sunt repraesentatae, quo variae inflexiones facilius perspicui possent. Abscissae autem huius curuae ad eo maiorem altitudinem assurgent, quo fortiores fuerint laminae nostrae elasticae: applicatae vero, singulis abscissis respondentes, perpetuo eandem inter se rationem tenere sunt censendae.

§. 4. His notatis quaelibet portio huius curuae, veluti  $AY$ , statum aequilibrui cuiuspiam laminae elasticae repraesentabit: scilicet semper assignari poterit lamina elastica longitudinis  $AY$ , quae, si in  $Y$  secundum directionem suam firmiter retineatur, atque ad figuram  $YA$  inflectatur, ob solum proprium pondus in hoc statu se conseruare possit, hocque modo punctum  $Y$ , vbicunque libuerit, accipere licet. Hic primum occurrunt ea puncta curuae, quibus applicatae sunt vel maximae vel minimae, vbi ergo tangentes sunt verticales. Quod si ergo quodpiam horum punctorum pro infimo termino laminae elasticae accipiat, is pauimento quoque verticaliter infigi debebit, ut de hoc situ declinare nequeat; tum enim pars superior

Tab. IV.

Fig. 2.

X 3

figu-

figuram assignatam ob proprium pondus recipere simulque in aequilibrio consistere poterit.

§. 5. Praeterea vero in hac curua infinita dabuntur puncta, quae littera O designauimus, ubi datur punctum flexus contrarii, atque adeo curuatura prorsus euanesceat; unde si infimus laminae elasticae terminus in tali puncto accipiat, non opus est, ut pavimento infigatur secundum suam directionem, sed sufficiet ut simpliciter insistat, et talis lamina ob proprium pondus figuram exhibitam recipere et in aequilibrio consistere poterit. Veluti si inferior laminae terminus in puncto O' capiatur, isque simpliciter pavimento EF insistat, tum ob solum proprium pondus lamina inflecti poterit secundum curuam O' N G M A, hoc-  
 Tab. IV. Fig. 3. que statu in aequilibrio persistere, propterea quod totius huius laminae centrum grauitatis G perpendiculariter puncto O' imminebit; euidens autem est, hunc statum aequilibrum esse labilem, et laminam minima vi esse prolapsuram.

§. 6. Hinc iam clarissime intelligimus, nullum horum casuum ad quaestionem propositam accommodari posse, quippe qua eiusmodi columna consideratur, cuius vterque terminus perpetuo in eadem recta verticali firmiter retineatur, dum in omnibus his casibus supremo termino A plena libertas conceditur; quamobrem, ut nostram quaestionem rite euoluamus, statum columnae, siue laminae elasticae, initialem aliter constituere debemus atque ante fecimus, scilicet praeter sollicitationes a grauitate oriundas supremo termino A certam quandam vim horizontalem applicatam concipere debemus, qua istud punctum A perpetuo in eadem recta verticali contineatur. Facile autem intelli-

telligitur, magnitudinem huius vis prius definiri non posse, quam totus calculus ad finem fuerit perductus; quandoquidem tum demum patebit, quanta vi opus sit, ad supremum terminum A in debito situ conseruandum. Quo autem haec noua inuestigatio clarius perspicī queat, ipsi quaestioni principali maiorem extensionem tribuamus eamque sequenti modo constituamus.

### Status Quaestionis.

§. 6. Proposita sit columna cylindrica, in situ verticali A B constituta, siue eius loco lamina elastica eiusdem roboris, cuius autem ambo termini A et B perpetuo in hoc situ ita retineantur, vt ab aliis viribus sollicitantibus inde nequiquam dimoueri queant. Huic iam laminae elasticae circa medium C quandam vim horizontalem C c applicatam concipiamus, qua laminae figura incuruata A B C tribuatur, quam mutationem autem tam exiguam esse statuamus, vt tota curua quasi infinite parum a recta verticali A B discrepet. Hoc posito quaeramus naturam huius curuae A C B, ad quam, tam ab ista vi, quam a proprio pondere inflectetur; hac enim quaestione resoluta facile patebit, vtrum, si vis sollicitans C c euanesceret, talis inflexio certo casu nihilominus locum habere queat; hoc enim ipso continebitur casus, quo columna a solo proprio pondere prosterneatur, quandoquidem ne minimam quidem curuaturam pati potest.

§. 7. Quoniam vero haec quaestio non solum summam circumspectionem postulat, sed etiam plurimis difficultatibus est inuoluta, laborem nostrum ab evolutione casus simplicissimi inchoemus, quo columnae omnis flexibili-

bilitas adimatur, eiusque loco in medio C eiusmodi iunctura tribuatur, quae cum certo elasticitatis momento flexurae resistat. Referat igitur recta verticalis AB talem columnam, cuius ambo termini A et B de suo loco amoveri nequeant; tum vero isti columnae in medio applicata sit vis horizontalis Cc, qua haec columna in statum inflexum ACB sit perducta, atque tam ex pondere columnae quam vi applicata Cc, ad momentum flexurae relata, quaeri debet status iste inflexus, siue anguli deflexionis a situ verticali CAO et CBO, qui quidem inter se erunt aequales, quia partes AC et BC aequales supponuntur.

§. 8. Vt nunc solutionem huius casus ordine instituamus, primo omnes vires consideremus, quibus haec columna actu sollicitatur. Hic igitur occurrit pondus, quod utrumque brachium CA et CB deorsum vrgetur. Posita igitur longitudine utriusque CA et CB = a vocetur pondus siue massa utriusque = M, quae vis in utriusque centro grauitatis seu medio applicata concipi potest; tum vero etiam actu sollicitatur a vi illa horizontali Cc, quam vocemus = C. Praeterea vero, quatenus ambo brachia iam ad angulum ACE sunt inflexa, loco vis elasticae mente substituamus elastrum Ee, quod vi sua contractiua conetur ambo brachia in directum extendere. Quod si ergo vocemus angulum CAB = CBA =  $\theta$ , erit angulus ECE =  $2\theta$ , cui proportionalis statui potest vis elastri, siquidem hunc angulum tanquam minimum spectemus. Hinc ergo, si vim elasticam absolutam littera E et intervallum Ch = Ce littera e designemus, momentum huius elastri erit  $2Ee\theta$ ; vnde simul patet, si horizontalis CO ducatur, fore CO =  $a \sin. \theta$  et AO = BO =  $a \cos. \theta$ , sicque, quia angu-

angulus  $\theta$  tanquam minimus spectatur, statuere poterimus  
 $\bullet$   $CO = a \theta$  et  $AO = BO = a$ .

§. 9. His autem viribus praeterea adiungi debent  
 eae vires, quae requiruntur, ad columnam in statu, quem  
 supponimus, retinendam. Primo igitur, quoniam termi-  
 nus A perpetuo in recta verticali AB retineri debet, ibi ap-  
 plicemus vim horizontalem  $Aa$ , quae fit  $= A$ , cuius va-  
 lor autem nondum est cognitus, quandoquidem praecise  
 tanta esse debet, vt punctum A in suo loco conferuetur.  
 Deinde quia terminus inferior B fundo ita insilire assu-  
 mitur, vt etiam de suo loco dimoueri nequeat, primo  
 ipsum fundum sustinebit totum columnae pondus, vnde  
 ipsum punctum B sursum virgeri censendum est vi  $BO =$   
 $= 2M$ ; dein. vero, ne de suo loco, siue dextrorsum siue fini-  
 strorsum, dimoueat, illi vim horizontalem  $Bb = B$  ap-  
 plicatam concipiamus, quae etiam inter incognita est refe-  
 renda. Tota autem columna suo pondere ita aget, quasi  
 eius pondus in communi centro grauitatis G vtriusque  
 brachii esset applicatum, quod quia in medium internalli  
 CO cadit, erit  $OG = \frac{1}{2} a \theta$ , cuius ergo directio erit recta  
 verticalis Gg.

§. 10. Cum nunc totum hoc systema in aequili-  
 brio consistere assumamus, primo omnes vires, ratione  
 quantitatis, se mutuo destruere debent, vnde pro viribus  
 horizontalibus habebimus hanc aequationem:  $A + B = C$ ;  
 vnde, simulac altera harum virium A et B fuerit cognita,  
 etiam altera innotescet. Tum vero vires verticaliter agen-  
 tes iam sibi contrariae sunt constitutae; tertio vero vires  
 elastri, in puncta E et e agentis, se mutuo perfecte destru-  
 unt.



unt. Praeterea autem ad aequilibrium requiritur, ut momenta omnium harum virium, respectu cuiuscunque axis, se mutuo destruant: constat enim, si hoc eueniat pro quolibet axe, id simul pro omnibus aliis locum habere. Consideremus igitur momenta harum virium respectu puncti A; ubi ergo vis  $Aa = A$  et vis  $BO = 2M$  momenta evanescent, quia directiones per ipsum punctum A transeunt; at vis horizontalis  $Bb = B$  dabit momentum finistrorsum vergens  $= 2aB$ , vis vero horizontalis  $Cc = C$  dabit momentum dextrorsum vergens  $= Ca$ ; vis denique verticalis  $Gg$  gignit momentum finistrorsum, quod erit  $Ma\theta$ ; unde nanciscimur hanc aequationem:  $2aB + Ma\theta = Ca$ . Quoniam igitur iam ante inuenimus  $A + B = C$ , nunc utramque seorsim determinare valemus: reperimus enim

$$A = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}Ma\theta \text{ et } B = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}Ma\theta.$$

§. II. His iam viribus determinatis ipsam resolutionem huius casus aggrediamur, quem in finem nostrum systema in puncto C fixum concipiamus, cuius ergo respectu vires, quae brachium CA seorsim sollicitant, se mutuo in aequilibrio servare debent; tum enim vires, alterum brachium sollicitantes, se quoque sponte in aequilibrio continebunt. At vero brachium CA primo sollicitatur a vi  $Aa = A$ , cuius momentum est  $Aa$ , finistrorsum tendens; in eandem vero etiam plagam tendet momentum, ex proprio pondere huius brachii ortum, quod est  $\frac{1}{2}Ma\theta$ . In contrariam autem plagam hoc brachium ab elastro abripietur, cuius momentum est  $2Ee\theta$ , ideoque habebimus hanc aequationem:  $Aa + \frac{1}{2}Ma\theta = 2Ee\theta$ , quae, si loco A valor inuentus substituatur, dabit  $\frac{1}{2}aC + Ma\theta = 2Ee\theta$ , in qua aequatione tota solutio nostri problematis continetur.

tur. Eadem autem aequatio etiam obtinetur ex consideratione alterius brachii. Primo enim hoc brachium vrgetur a vi  $Bb = B$ , cuius momentum, sinistrorsum tendens, est  $Ba$ ; deinde ex vi  $BO = 2M$ , siue reactione fundi, oritur momentum in eandem plagam vergens  $= 2Ma\theta$ ; tum vero hoc brachium ob proprium pondus praebet momentum dextrorsum vergens  $= \frac{1}{2}Ma\theta$ ; denique vero ab elastro in  $e$  applicato oritur momentum etiam dextrorsum tendens  $= 2Ee\theta$ ; sicque hinc orietur ista aequatio:

$$Ba + 2Ma\theta = \frac{1}{2}Ma\theta + 2Ee\theta,$$

in qua si loco  $B$  suus scribatur valor, proueniet haec aequatio:  $\frac{1}{2}Ca + Ma\theta = 2Ee\theta$ .

§. 12. Cum igitur tota solutio casus propositi in hac aequatione contineatur:  $2Ee\theta = \frac{1}{2}Ca + Ma\theta$ , hinc statim angulus  $\theta$  definiri potest, ad quem nostra columna a proposita vi horizontali  $Cc$  deflecti poterit: erit enim  $\theta = \frac{Ca}{4Ee - \frac{1}{2}Ma}$ ; vbi manifestum est, hunc casum locum habere non posse, nisi vis elastica, in formula  $Ee$  contenta, multo maior fuerit quam  $Ma$ , quandoquidem hic supponimus, angulum  $\theta$  valde esse exiguum. Hinc autem vicissim assignare poterimus vim horizontalem  $Ce = C$ , quae valeat nostram columnam ad datum angulum  $BAC = \theta$  deflectere: erit enim ista vis  $C = \frac{2}{a}(2Ee - Ma)$ . Hinc statim patet, dari eiusmodi casus, quibus talis deflexio nullam vim horizontalem postulat, atque adeo columna a proprio pondere ad hanc deflexionem vrgetur; et quoniam angulus  $\theta$  hic non determinatur, ista columna a solo pondere continuo maiorem deflexionem recipiet, atque adeo penitus corruet. Hoc nempe toties eueniet, quoties fuerit

Y 2

Ma

$M a = 2 E e$ , qui est ipse ille casus, quem hic evoluerē nobis proposuimus.

§. 13. Hunc igitur casum diligentius perpendamus, ac primo quidem ponamus, totam huius columnae altitudinem esse  $A B = b$ , ita ut sit  $a = \frac{1}{2} b$ ; tum vero sit amplitudo huius columnae  $= d d$ ; atque hinc sumi poterit  $M = \frac{1}{2} d d b$ , quia  $M$  denotabat. dimidiaae columnae pondus. Hinc ergo postrema aequatio dabit  $\frac{1}{2} b b d d = 2 E e$ , unde altitudo huius columnae ita determinabitur, ut sit  $b = \sqrt{\frac{8 E e}{d d}}$ .

Quoties ergo talis columna, qualem hic assumimus, quae scilicet nullam inflexionem recipere queat, praeterquam in suo medio, ubi momentum inflexioni resistens sit  $E e$ , tantam habeat altitudinem, vel maiorem, tum certe proprium suum pondus sustinere non valebit, sed penitus prosterne-  
tur; unde iam nouum argumentum habemus contra opinio-  
nem supra memoratam, qua arbitratus sum, nullam colum-  
nam sub proprio pondere occumbere posse. Hoc igitur  
casu expedito multo facilius resolutionem quaestionis §. 6.  
et seqq. descriptae suscipere poterimus.

### Resolutio Quaestionis.

§. 14. Quoniam, si huic columnae vnica vis hori-  
zontalis in medio applicaretur, tota columna non in-  
curuam continuam deflecteretur, totam istam vim hori-  
zontalem aequaliter per totam columnae altitudinem, quae  
sit  $A B = b$ , distribuamus, ita ut, si tota illa vis hori-  
zontalis fuerit  $= C$ , elemento cuicunque  $X x = d x$  applicari  
debeat vis horizontalis elementaris  $= \frac{C d x}{b}$ . Tales igitur vi-  
res horizontales singulis columnae elementis applicatae  
conciuantur. Deinde etiam singula elementa ob proprium pon-

Tab. IV  
Fig. 6.

pondus deorsum sollicitabuntur, viribus  $\frac{Mdx}{b}$ , siquidem  $M$  denotet pondus totius columnae; sicque iam habemus omnes vires, quibus haec columna actu sollicitatur; siquidem iis adiungamus momentum elasticitatis, quo haec columna in singulis punctis pollere statuitur, quod, vt haecenus fecimus, per formulam  $Ekk$  repraesentemus.

§. 15. Praeterea vero, quoniam supremus columnae terminus  $A$  perpetuo in ea recta verticali retineri debet, ei horizontaliter applicatam concipiamus vim  $Aa = A$ ; tum vero termino inferiori  $B$ , ob eandem rationem, applicemus vim horizontalem  $Bb = B$ . Porro vero iste terminus inferior, ob pondus columnae, verticaliter fursum vrgeri censendus est vi  $M$ ; insuper autem in calculum introduci debet centrum grauitatis columnae incuruatae, quod si ponamus cadere in punctum  $G$ , eius distantia ab axe reperietur  $GO = \frac{\int y dx}{b}$ . Posita enim abscissa  $AX = x$  et applicata  $XY = y$ , ob inflexionem infinite paruum, elementum  $Yy$  ipsi elemento abscissae  $Xx$  aequale censi potest. Cum igitur eius pondus sit  $\frac{Mdx}{b}$ , eius momentum, respectu axis  $AB$ , erit  $\frac{Mydx}{b}$ , cuius integrale, per totam columnam extensum, erit  $\frac{M}{b} \int y dx$ , cui ergo aequale esse debet momentum totius columnae, si eius pondus in puncto  $G$  esset collectum, quod ergo erit  $M \cdot GO$ ; vnde manifesto sequitur intervallum  $GO = \frac{1}{b} \int y dx$ , pro quo ergo intervallo inueniendo area totius curuae  $AYB$  inuestigari debet, sicque in hoc puncto  $G$  vis applicata est concipienda horizontalis  $Gg = M$ .

§. 16. Quoniam nunc primo omnes istae vires ratione quantitatis se invicem destruere debent, pro viribus horizontalibus hanc nanciscimur aequationem:  $A + B = C$ ; vires autem verticales iam se sponte destruunt, cum sit vis  $BO = M$  et vis  $Gg = M$ . Praeterea vero necesse est, ut omnium harum virium momenta respectu puncti  $A$  se destruant: ubi ergo virium  $Aa$  et  $BO$  momenta per se sunt nulla, vis autem  $Bb$  momentum sinistrorsum vergens erit  $Bb$ , atque in eundem sensum verget momentum, ex vi seu pondere columnae  $Gg = M$ , ortum, quod ergo momentum, ob  $GO = \frac{\int y dx}{b}$ , erit  $\frac{M}{b} \int y dx$ , hoc scilicet integrali per totam columnam extenso. Ne autem haec conditio calculum turbet, vocemus hoc intervallum  $GO = g$ , ita ut sit  $g = \frac{\int y dx}{b}$  et momentum hinc natum erit  $= Mg$ . Superest igitur, ut omnia momenta ex omnibus viribus horizontalibus  $YV = \frac{Cx dx}{b}$  nata, colligantur; quare, cum ex ista vi  $YV$  nascatur momentum  $\frac{Cx dx}{b}$ , summa omnium horum momentorum per totam altitudinem erit  $\frac{1}{2} Cb$ , quod dextrorsum vergit, ita ut hinc obtineamus hanc aequationem:  $Bb + Mg = \frac{1}{2} Cb$ , ex qua aequatione statim colligimus  $B = \frac{1}{2} C - \frac{Mg}{b}$ , hincque porro alteram vim incognitam  $A = \frac{1}{2} C + \frac{Mg}{b}$ .

§. 17. Nunc iam totam columnam, quasi in puncto  $Y$  esset fixa, contemplemur, atque ex omnibus viribus, arcum  $AY$  sollicitantibus, earum momenta inuestigemus respectu huius puncti  $Y$ , quippe quorum summa aequalis esse debet momento elasticitatis, quod quoniam a curvatura in hoc loco pendet, si radium osculi in hoc loco statuamus  $= r$ , ipsum elasticitatis momentum erit  $\frac{Ekk}{r}$ ; praeterea

terea vero momentum vis  $Aa = A$ , respectu huius puncti  $Y$ , est  $Ax$ . Momenta autem, quae tam ex viribus horizontalibus quam verticalibus toti arcui  $AY$  sunt applicatae, seorsim inuestigari debent.

§. 18. Cum igitur hic punctum  $Y$  tanquam fixum spectetur, arcum  $AY$  secundum maiorem scalam hic seorsim repraesentemus, ita ut sit  $AX = x$  et  $XY = y$ , quas quantitates ergo tantisper quasi constantes spectari licet; tum autem consideretur huius arcus elementum quodcunque  $Uu$ , per coordinates  $AT = t$  et  $TU = u$  determinatum, quae hic solae ut variables sunt tractandae. Cum igitur, ob deflexionem minimam, sit ut supra elementum  $Uu = Tt = dt$ , ei primo applicata erit vis horizontalis  $UP = \frac{cdt}{b}$ ; praeterea vero eidem applicata est vis verticalis  $UQ = \frac{Mdt}{b}$ . Illius igitur vis  $UP = \frac{cdt}{b}$  momentum, respectu puncti  $Y$ , erit  $\frac{c(x-t)dt}{b}$ , cuius ergo integrale erit  $\frac{ct}{b}(x - \frac{1}{2}t)$ , quod summa horum momentorum per arcum  $AU$  continet. Promoveatur nunc punctum  $U$  usque in  $Y$ , atque summa omnium horum momentorum, ex arcu  $AY$  natorum, erit  $\frac{1}{2} \frac{Cxx}{b}$ , cuius effectus dextrorsum tendit.

Tab. IV.  
Fig. 7.

§. 19. At vero pro viribus verticalibus, vis  $UQ = \frac{Mdt}{b}$  momentum respectu puncti  $Y$  erit

$$\frac{Mdt}{b} QY = \frac{M(y-u)dt}{b},$$

quod sinistrorsum tendit, prorsus ut momentum vis  $Aa = A$ . Integretur iam ista formula, ut obtineatur momentum ex arcu

cu

cu A U oriundum, quod erit  $\frac{M}{b}(yt - \int u dt)$ . Promoveatur punctum  $u$  vsque in  $y$ , faciendo  $t = x$  et  $u = y$ , atque totum momentum, ex arcu A Y ortum, erit  $\frac{M}{b}(xy - \int y dx)$ , quae formula manifesto reducitur ad hanc:  $\frac{M}{b} \int x dy$ .

§. 20. Inuentis igitur his tribus momentis, quarum primum A x finistrorsum, secundum  $\frac{1}{2} C x x$  dextrorsum, tertium vero modo inuentum,  $\frac{M}{b} \int x dy$ , iterum finistrorsum agit, totum momentum finistrorsum virgens erit  $Ax + \frac{M}{b} \int x dy - \frac{C x x}{2b}$ , cui ergo aequale esse debet momentum elasticitatis  $\frac{E k k}{r}$ , quippe quod dextrorsum vergit, unde adipiscimur hanc aequationem:

$$Ax + \frac{M}{b} \int x dy - \frac{C x x}{2b} = \frac{E k k}{r},$$

quae, si loco A valorem ante inuentum substituamus, induet hanc formam:

$$\frac{1}{2} C x - \frac{C x x}{2b} + \frac{M g x}{b} + \frac{M}{b} \int x dy = \frac{E k k}{r}.$$

In hac ergo aequatione omnia continentur, quae circa solutionem problematis propositi desiderari possunt.

§. 21. Quoniam autem radius osculi etiamnunc in hac aequatione reperitur, propter applicatas  $y$  vt infinite paruas spectandas statui poterit  $r = -\frac{dx^2}{ddy}$ , si quidem elementum  $dx$  pro constante accipiatur. Hinc ergo nostra aequatio erit:

$$\left(\frac{1}{2} C + \frac{M g}{b}\right) x - \frac{C x x}{2b} + \frac{M}{b} \int x dy + \frac{E k k ddy}{d x^2} = 0,$$

quae per  $\frac{M}{b}$  diuisa euadit:

$$\left(\frac{Cb}{2M} + g\right) x - \frac{C x x}{2M} + \int x dy + \frac{E k k ddy}{M d x^2} = 0,$$

vbi

vbi notetur, fractionem  $\frac{M}{b}$  amplitudinem columnae exprimere, neque adeo ab altitudine columnae  $b$  pendere. Si enim amplitudo columnae ponatur  $= b b$ , statui poterit  $M = b b b$ ; quo observato aequatio nostra hanc induet formam:

$$\left(\frac{c}{b b} + g\right) x - \frac{c x x}{b b b} + \int x d y + \frac{E k k d d y}{b b, d x^2}.$$

Deinde etiam initio ostendimus, formulam  $E k k$  quadrato amplitudinis, seu ipsi  $b^2$ , esse proportionalem, vnde statuere poterimus,  $E k k = b^2 e$ , vbi  $e$  est linea, vi elasticae absolute proportionalis. Hoc igitur valore introducto aequatio sequentem induet formam:

$$\left(\frac{c}{b b} + g\right) x - \frac{c x x}{b b b} + \int x d y + e b b. \frac{d d y}{d x^2} = 0,$$

vnde ergo per geminam integrationem valor applicatae  $y$ , per abscissam  $x$  expressus, erui debet, quod aliter nisi per series infinitas praestari nequit.

§. 22. Vt autem istae integrationes rite ad statum quaestionis accommodentur, sequentia praecepta sunt tenenda:

1°. Formulae  $\int x d y$  integrale ita capi debet, vt evanescat posito  $x = 0$ .

2°. Quia curua necessario per ipsum punctum A transit, altera aequationis nostrae integratio ita debet determinari, vt posito  $x = 0$  fiat quoque  $y = 0$ .

3°. Altera vero integratio pro abscissis minimis dare debet talem aequationem:  $y = \alpha x$ ; vbi ergo ista constans  $\alpha$  designat tangentem anguli, quem curua cum axe in A constituit, vel adeo ipsum hunc angulum, siqui-



dem ut infinite parvus est spectandus. Hic autem imprimis est obseruandum, istum angulum  $\alpha$  effectum totum exhibere, quem vis horizontalis C, columnae applicata, producere valet. Hoc igitur modo series infinita reperiri poterit, quae pro qualibet abscissa  $x$  quantitatem applicatae  $y$  determinabit.

§. 23. Integratione autem hac lege instituta eam conditionem principalem adimpleri oportet, quae postulat, ut, posita abscissa  $x = b$ , applicata  $y$  denuo euanescat. Hoc igitur modo obtinebitur aequatio, meras quantitates constantes inuoluens; eas scilicet, quae in aequatione differentiali continentur, ac praeterea angulum deflexionis  $\alpha$ . Hinc autem ipsam hanc deflexionem  $\alpha$ , quatenus a vi horizontali C producit, nondum definire licet, quoniam in hac aequatione adhuc inest quantitas  $g$ , interuallum GO exprimens, cuius valor nunc demum per integrationem, ex aequatione inter  $x$  et  $y$  inuenta, definiri debet. Vidimus enim esse  $g = \frac{\int y dx}{b}$ , postquam scilicet integrale  $\int y dx$  a termino  $x = 0$  usque ad terminum  $x = b$  fuerit extensum.

§. 24. Postquam igitur aequatio inter  $x$  et  $y$  fuerit inuenta, ex ea per integrationem euoluatur formula  $\int y dx$ , quae, per totam altitudinem extensa, praebit valorem producti  $gb$ ; sicque denuo hinc colligitur aequatio inter easdem quantitates constantes, quae ergo si cum superiore aequatione combinetur, inde quantitas  $g$  eliminari poterit, quo facto habebitur noua aequatio, ex qua pro quavis vi horizontali C definiri poterit angulus deflexionis

xionis  $\alpha$ , quandoquidem reliquae quantitates in aequatione contentae omnes tanquam datae spectari possunt.

§. 25. Ex hac autem ultima aequatione, unde valorem ipsius  $\alpha$  elici oportet, simul patebit, eiusmodi dari casus, quibus eadem deflexio  $\alpha$  oriri potest, etiam si vis horizontalis  $C$  prorsus evanescat; atque hinc orietur casus, quem hic praecipue examinare constituimus, quo scilicet in eam columnae altitudinem inquirimus, quam si columna attigerit, ob proprium pondus incuruari incipiat, atque adeo frangatur, quare ad hunc casum analysin superiorem accommodabimus.

Inuestigatio maximae altitudinis, qua columna adhuc proprium suum pondus sustinere valet.

§. 26. Pro hoc ergo casu statim ponamus vim horizontaliter applicatam  $C = 0$ , et iam aequatio nostra differentio-differentialis erit:

$$g x + \int x dy + e b b \cdot \frac{dd y}{dx^2} = 0,$$

in qua loco  $e b b$  br. gr. scribamus litteram  $m$ , pro cuius integrali si fingamus seriem

$$y = \alpha x + \beta x x + \gamma x^3 + \delta x^4 \text{ etc.}$$

mox patebit, fore  $\beta = 0$ , simulque omnes potestates sequentes ipsius  $x$ , quarum exponentes sunt formae  $3n + 2$ ; tum vero potestatum, quarum exponentes sunt formae  $3n + 1$ , coefficientes tantum per litteram  $\alpha$  determinari; at vero potestatum, quarum exponentes sunt formae  $3n$ , coefficientes per solam litteram  $g$  definiri.

§. 27. Hinc ergo statim valorem ipsius  $y$  in duas partes diuellere poterimus, quae sint  $y = \alpha p + g q$ ; hoc autem valore introducto aequatio nostra erit

$$g x + \alpha \int x dp + g \int x dq + m \alpha \cdot \frac{d \alpha p}{d x^2} \cdot m g \cdot \frac{d g q}{d x^2} = 0.$$

vnde hae duae aequationes deriuantur :

$$\text{I. } \int x dp + m \frac{d \alpha p}{d x^2} = 0.$$

$$\text{II. } x + \int x dq + m \frac{d g q}{d x^2} = 0.$$

Pro priore, quoniam nouimus, primum terminum ipsius  $p$  esse  $x$ , statuamus  $p = x - A x^4 + B x^7 + C x^{10} + \text{etc.}$  factaque substitutione perueniemus ad sequentem aequationem :

$$0 = \begin{cases} \frac{m d \alpha p}{d x^2} = -4.3 m A x^2 + 7.6 m B x^5 - 10.9 m C x^8 + 13.12 m D x^{11} \text{ etc.} \\ \int x dp = \frac{1}{2} x x - \frac{4}{5} A x^5 + \frac{7}{8} B x^8 - \frac{10}{11} C x^{11} + \text{etc.} \end{cases}$$

vnde ergo coefficientes assumti sequenti modo determinantur :

$$A = \frac{1}{2.3.4.m}; B = \frac{4A}{5.6.7.m} = \frac{1.4}{2.3. \dots . 7 m^2},$$

$$C = \frac{7 B}{8.9.10.m} = \frac{1.4.7}{2.3. \dots . 10. m^3}$$

$$D = \frac{10 C}{11.12.13.m} = \frac{1.4.7.10}{2.3. \dots . 13. m^4} \text{ etc.}$$

Pro valore ipsius  $q$ , ex altera aequatione eruendo, fingamus  $q = -\mathcal{A} x^3 + \mathcal{B} x^6 - \mathcal{C} x^9 + \mathcal{D} x^{12} - \text{etc.}$  et facta substitutione perueniemus ad hanc aequationem :

$$\left. \begin{aligned} \frac{m d g q}{d x^2} &= -3.2 m \mathcal{A} x + 6.5 m \mathcal{B} x^4 - 9.8 m \mathcal{C} x^7 + 12.11 m \mathcal{D} x^{10} - \text{etc.} \\ \int x dq &= -\frac{3}{4} \mathcal{A} x^4 + \frac{6}{7} \mathcal{B} x^7 - \frac{9}{10} \mathcal{C} x^{10} + \text{etc.} \\ + x &= + 1. x \end{aligned} \right\} = 0$$

vnde ergo coefficientes assumti sequenti modo determinabuntur :

$$\mathcal{A} =$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2, 3, m}; \mathcal{B} = \frac{1 \cdot 3}{4, 5, 6, m} = \frac{1 \cdot 3}{2, 3, \dots, 6 m^2}; \mathcal{C} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2, 3, \dots, 9 m^3};$$

$$\mathcal{D} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2, 3, \dots, 12 m^4}; \text{ etc.}$$

§. 28. Pro his igitur litteris  $p$  et  $q$ , habebimus istas series infinitas:

$$p = x - \frac{x^4}{2, 3, 4, m} + \frac{1 \cdot 4 \cdot x^7}{2, 3, \dots, 7, m^2} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot x^{10}}{2, 3, \dots, 10, m^3} + \text{etc.}$$

$$q = -\frac{x^3}{2, 3, m} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^6}{2, 3, \dots, 6, m^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot x^9}{2, 3, \dots, 9, m^3} + \text{etc.}$$

quibus seriebus inuentis erit  $y = \alpha p + g q$ . Statuamus  $x = b$ , et quia fieri debet  $y = 0$ , habebimus hanc primam aequationem pro solutione nostri problematis:  $\alpha p + g q = 0$ . At vero pro valore literae  $g$  eruendo, cum fit  $g b = \int y dx = \alpha \int p dx + g \int q dx$ , his integralibus ab  $x = 0$  ad  $x = b$  extensis, habebimus primo

$$\int p dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{x^5}{2, 3, 4, m} + \frac{1 \cdot 4 \cdot x^8}{2, 3, \dots, 7, m^2} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot x^{11}}{2, 3, \dots, 10, m^3} + \text{etc. et}$$

$$\int q dx = -\frac{x^4}{2, 3, 4, m} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^7}{2, 3, \dots, 6, m^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot x^{10}}{2, 3, \dots, 9, m^3} + \text{etc.}$$

vbi ergo, postquam posuerimus  $x = b$ , oriri debet haec aequatio:  $g b = \alpha \int p dx + g \int q dx$ , vnde deducimus

$$g = \frac{\alpha \int p dx}{b - \int q dx},$$

qui valor in superiore aequatione  $\alpha p + g q = 0$  substitutus praebet

$$p + \frac{q \int p dx}{b - \int q dx} = 0,$$

sive  $b p - p \int q dx + q \int p dx = 0$ , quae aequatio duas tantum quantitates  $b$  et  $m$  inuoluit, ex qua ergo valorem ipsius  $b$  eruere licebit, hicque valor ipsam illam maximam altitudinem columnae declarabit, in qua se tantum non sustinere valebit.

§. 29. Quo nunc has formulas propius ad calculum accommodemus, ponamus  $\frac{x^3}{m} = \frac{b^3}{m} = t$ , atque series, quibus indigemus, sequenti modo designemus, posito scilicet ubique  $x = b$ :

$$p = b \left( 1 - \frac{1 \cdot t}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 7} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 10} + \text{etc.} \right) = b \cdot P$$

$$q = -1 \left( \frac{t}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 9} - \text{etc.} \right) = -1 \cdot Q$$

$$\int p \, dx = b^2 \left( \frac{t}{2} - \frac{t}{2 \cdot \dots \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 8} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 11} + \text{etc.} \right) = -b^2 \cdot P'$$

$$\int q \, dx = -b \left( \frac{t}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 10} - \text{etc.} \right) = -b \cdot Q'$$

Quod si iam istos novos valores introducamus, postrema nostra aequatio sequentem induet formam:

$$b \cdot b \cdot P + b \cdot b \cdot P \cdot Q' - b \cdot b \cdot Q \cdot P' = 0,$$

at per  $b \cdot b$  diuisa fit  $P + P \cdot Q' - Q \cdot P' = 0$ , quae aequatio nullam aliam literam inuoluit nisi  $t$ , unde ergo si defini-

nire licuerit hanc quantitatem  $t$ , erit  $b = \sqrt[3]{m \cdot t}$ , hoc est

$t = \sqrt[3]{b \cdot b \cdot e \cdot t} =$  altitudini columnae quaesitae; ubi valor  $t$  est numerus quidam absolutus, ex illa aequatione eruendus. Quare cum  $e$  pro eadem materia, ex qua columnae conficiuntur, eundem retineat valorem, pro variis amplitudinibus columnarum maximae altitudines quaesitae sequuntur rationem subtriplicatam altitudinum, id quod egregie conuenit cum theoremate dissertationi praecedenti annexo.

§. 30. Vt igitur ista altitudo  $b$  per calculum definiri possit, sequentes quatuor series, quantitatem incognitam  $t$  inuoluentes, rite evolui debebunt:

$$P = 1 - \frac{1 \cdot t}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 7} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 10} + \text{etc.}$$

$$P' = \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot t}{2 \cdot \dots \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 8} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 11} + \text{etc.}$$

$$Q =$$

$$Q = \frac{1 \cdot t}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 9} - \text{etc.}$$

$$Q' = \frac{1 \cdot t}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot t^3}{1 \cdot \dots \cdot 10} - \text{etc.}$$

atque nunc totum negotium huc redit, ut ille valor ipsius  $t$  inuestigetur, quo huic aequationi satisfiat:  $P + P Q' - Q P' = 0$ , id quod aliter nisi tentando fieri nequit: plures scilicet pro  $t$  assumi conveniet successive valores, atque ex erroribus singulorum concludi poterit verus valor ipsius  $t$ . Mox autem inuestiganti patebit, valorem ipsius  $t$  non exiguum esse, sed potius satis magnum accipi debere.

§. 31. Postquam autem hinc verus valor numeri  $t$  fuerit erutus, ut inde statim quaesitam altitudinem  $b$  in mensura penitus cognita assignare valeamus, ponamus haberi columnam cylindricam, ex eadem materia paratam, cuius altitudo sit  $= a$ , amplitudo vero  $= d d$ , et quae per experimenta comperta sit gestare posse onus  $\Gamma$ , quod se habeat ad pondus huius columnae, ut  $\lambda: 1$ , ita ut sit  $\Gamma = \lambda a d d$ . Iam ex iis, quae de vi columnarum iam olim sunt tradita, istud onus  $\Gamma$  inuentum est

$$\Gamma = \frac{\pi \pi E k k}{a a},$$

existente  $E k k = d^4 e$ , vnde ergo fiet

$$e = \frac{\Gamma a a}{\pi \pi d^4} = \frac{\lambda a^3}{\pi \pi d d}.$$

Substituatur ergo iste valor in formula nostra pro  $b$  inventa, ac reperietur

$$b = a \sqrt[3]{\frac{\lambda b b}{\pi \pi d d}}.$$

vbi iam omnia elementa penitus sunt cognita.

# Calculus

Pro inuestigando valore numeri  $t$ .

§. 32. Quoniam hic quatuor series euolui debent, designemus terminos cuiusque seriei ordine per cyphas romanas I, II, III, IV, etc. atque pro seriebus P et P', in subsidium vocentur sequentes formulae:

Pro serie P	Pro serie P'
$lII = lI + lt \quad . \quad -1,3802112$	$II' = \frac{1}{3} II$
$lIII = lII + lt \quad . \quad -1,7201593$	$III' = \frac{1}{8} III$
$lIV = lIII + lt \quad . \quad -2,0122340$	$IV' = \frac{1}{14} IV$
$lV = lIV + lt \quad . \quad -2,2345173$	$V' = \frac{1}{14} V$
$lVI = lV + lt \quad . \quad -2,4123950$	$VI' = \frac{1}{17} VI$
$lVII = lVI + lt \quad . \quad -2,5603551$	$VII' = \frac{1}{25} VII$
$lVIII = lVII + lt \quad . \quad -2,6869185$	$VIII' = \frac{1}{25} VIII$
$lIX = lVIII + lt \quad . \quad -2,7974566$	$IX' = \frac{1}{26} IX$
$lX = lIX + lt \quad . \quad -2,8955551$	$X' = \frac{1}{29} X$
$lXI = lX + lt \quad . \quad -2,9837228$	$XI' = \frac{1}{30} XI$
$lXII = lXI + lt \quad . \quad -3,0637814$	$XII' = \frac{1}{33} XII$
$lXIII = lXII + lt \quad . \quad -3,1370931$	$XIII' = \frac{1}{38} XIII$
$lXIV = lXIII + lt \quad . \quad -3,2047065$	$XIV' = \frac{1}{41} XIV$
$lXV = lXIV + lt \quad . \quad -3,2674417$	$XV' = \frac{1}{44} XV$
$lXVI = lXV + lt \quad . \quad -3,3259545$	$XVI' = \frac{1}{47} XVI$
$lXVII = lXVI + lt \quad . \quad -3,3807774$	$XVII' = \frac{1}{50} XVII$
$lXVIII = lXVII + lt \quad . \quad -3,4323474$	$XVIII' = \frac{1}{53} XVIII$
$lXIX = lXVIII + lt \quad . \quad -3,4810291$	$XIX' = \frac{1}{56} XIX$
$lXX = lXIX + lt \quad . \quad -3,5271282$	$XX' = \frac{1}{59} XX$

§. 33. Simili modo pro computo ferierum Q et Q' inferuient sequentes formulae:

Pro serie Q	Pro serie Q'
$I = . . . + lt - 0, 7781513$	$I' = \frac{1}{4} I$
$II = I . . + lt - 1, 6020600$	$II' = \frac{1}{7} II$
$III = II . . + lt - 1, 9242793$	$III' = \frac{1}{10} III$
$IV = III . . + lt - 2, 1663314$	$IV' = \frac{1}{13} IV$
$V = IV . . + lt - 2, 3569815$	$V' = \frac{1}{16} V$
$VI = V . . + lt - 2, 5137501$	$VI' = \frac{1}{19} VI$
$VII = VI . . + lt - 2, 6467304$	$VII' = \frac{1}{22} VII$
$VIII = VII . . + lt - 2, 7621424$	$VIII' = \frac{1}{25} VIII$
$IX = VIII . . + lt - 2, 8640659$	$IX' = \frac{1}{28} IX$
$X = IX . . + lt - 2, 9553135$	$X' = \frac{1}{31} X$
$XI = X . . + lt - 3, 0379043$	$XI' = \frac{1}{34} XI$
$XII = XI . . + lt - 3, 1133355$	$XII' = \frac{1}{37} XII$
$XIII = XII . . + lt - 3, 1727474$	$XIII' = \frac{1}{40} XIII$
$XIV = XIII . . + lt - 3, 2470286$	$XIV' = \frac{1}{43} XIV$
$XV = XIV . . + lt - 3, 3068844$	$XV' = \frac{1}{46} XV$
$XVI = XV . . + lt - 3, 3628844$	$XVI' = \frac{1}{49} XVI$
$XVII = XVI + lt - 3, 4154951$	$XVII' = \frac{1}{52} XVII$
$XVIII = XVII + lt - 3, 4651028$	$XVIII' = \frac{1}{55} XVIII$
$XIX = XVIII + lt - 3, 5120318$	$XIX' = \frac{1}{58} XIX$
$XX = XIX . . + lt - 3, 5565564$	$XX' = \frac{1}{61} XX$

§. 34. Nunc igitur tantum opus est, vt numero  $t$  varii valores tribuantur pro lubitu, qui tamen non nimium a veritate abhorreere videantur; quare cum in praecedente dissertatione ostenderimus, hunc numerum  $t$  certe minorem esse quam 266; incipiamus nostram inuestigationem

A a nem



nem a valore  $t = 200$ , visuri, vtrum iste valor iusto sit maior, an minor. Quod si enim hinc valor formulae nostrae  $P(1 + Q') - QP'$  prodierit positivus, id erit indicio, istum valorem  $t = 200$  esse nimis parvum; sin autem prodierit negativus, numerum  $t$  diminui oportebit.

§. 35. Sumamus igitur  $t = 200$  et calculus pro seriebus  $P$  et  $P'$  ita stabit:

	Pro serie $P$ .	Pro serie $P'$ .
$I = 0,0000000$	$I = + 1,0000$	$I' = + 0,5000$
$I t = 2,3010300$		
<u>2,3010300</u>		
$1,3802112$		
$II = 0,9208188$	$II = - 8,3333$	$II' = - 1,6667$
<u>2,3010300</u>	<u>- 7,3333</u>	<u>- 1,1667</u>
$3,2218488$		
<u>1,7201593</u>		
$III = 1,5016895$	$III = + 31,7460$	$III' = + 3,9682$
<u>2,3010300</u>	<u>+ 24,4127</u>	<u>+ 2,8015</u>
$3,8027195$		
<u>2,0122340</u>		
$IV = 1,7904855$	$IV = - 61,7285$	$IV' = - 5,6117$
<u>2,3010300</u>	<u>- 37,3158</u>	<u>- 2,8102</u>
$4,0915155$		
<u>2,2345173</u>		
$V = 1,8569982$	$V = + 71,9446$	$V' = + 5,1389$
	<u>+ 34,6288</u>	<u>+ 2,3287</u>
		$IV =$

	Pro serie P.	Pro serie P'.
$I V = 1,8569982$ $\underline{2,3010300}$ $4,1580282$ $\underline{2,4123950}$	$V = + 71,9446$ $\underline{+ 34,6288}$	$V' = + 5,1389$ $\underline{+ 2,3287}$
$I VI = 1,7456332$ $\underline{2,3010300}$ $4,0466632$ $\underline{2,5603551}$	$VI = - 55,6715$ $\underline{- 21,0427}$	$VI' = - 3,2748$ $\underline{- 0,9461}$
$I VII = 1,4863081$ $\underline{2,3010300}$ $3,7873381$ $\underline{2,6869185}$	$VII = + 30,6414$ $\underline{+ 9,5987}$	$VII' = + 1,5321$ $\underline{+ 0,5860}$
$I VIII = 1,1004196$ $\underline{2,3010300}$ $3,4014496$ $\underline{2,7974566}$	$VIII = - 12,6014$ $\underline{- 3,0027}$	$VIII' = - 0,5479$ $\underline{+ 0,0381}$
$I IX = 0,6039930$ $\underline{2,3010300}$ $2,9050230$ $\underline{2,8955551}$	$IX = + 4,0179$ $\underline{+ 1,0152}$	$IX' = + 0,1543$ $\underline{+ 0,1926}$
$I X = 0,0094679$ $\underline{2,3010300}$ $2,3104979$ $\underline{2,9837228}$	$X = - 1,0220$ $\underline{- 0,0068}$	$X' = - 0,0352$ $\underline{+ 0,1574}$
$I XI = 9,3267751$	$XI = + 0,2122$ $\underline{+ 0,2054}$	$XI' = + 0,0066$ $\underline{+ 0,1640}$
	A a 2	I XI

	Pro serie P.	Pro serie P'.
$\begin{array}{r} 1 \text{ XI} = 9,3267751 \\ \underline{2,3010300} \\ 1,6278051 \\ \underline{3,0637814} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XI} = + 0,2122 \\ \underline{+ 0,2054} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XI}' = + 0,0066 \\ \underline{+ 0,1640} \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 \text{ XII} = 8,5640237 \\ \underline{2,3010300} \\ 0,8650537 \\ \underline{3,1370931} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XII} = - 0,0366 \\ \underline{+ 0,1688} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XII}' = - 0,0010 \\ \underline{+ 0,1630} \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 \text{ XIII} = 7,7279606 \\ \underline{2,3010300} \\ 0,0289906 \\ \underline{3,2047065} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XIII} = + 0,0053 \\ \underline{+ 0,1741} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XIII}' = + 0,0001 \\ \underline{+ 0,1631} \end{array}$
$1 \text{ XIV} = 6,8242841$	$\begin{array}{r} \text{XIV} = - 0,0007 \\ \underline{+ 0,1734} \end{array}$	

§. 36. Simili modo instituaturs calculus pro inueniendis valoribus Q et Q', quippe qui, in vsum vocando formulas §. 33. exhibitas, ita se habebit:

	Pro serie Q.	Pro serie Q'.
$\begin{array}{r} 1 \text{ I} = 2,3010300 \\ \underline{0,7781513} \end{array}$		
$\begin{array}{r} 1 \text{ II} = 1,5228787 \\ \underline{2,3010300} \\ 3,8259087 \\ \underline{1,6020600} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{I} = + 33,3333 \\ \\ \\ \text{II} = - 166,6667 \\ \underline{- 133,3334} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{I}' = + 8,3333 \\ \\ \\ \text{II}' = - 23,8095 \\ \underline{- 15,4762} \\ 1 \text{ II} = \end{array}$

	Pro ferie Q.	Pro ferie Q'.
I II = 2,2218487 2,3010300 4,5228787 1,9242793	II = - 166,6667 - 133,3334	II' = - 23,8095 - 15,4762
I III = 2,5985994 2,3010300 4,8996294 2,1663314	III = + 396,8254 + 263,4920	III' = + 39,6825 + 24,2063
I IV = 2,7332980 2,3010300 5,0343280 2,3569815	IV = - 541,1255 - 277,6335	IV' = - 41,6250 - 17,4187
I V = 2,6773465 2,3010300 4,9783765 2,5137501	V = + 475,7147 + 198,0812	V' = + 29,7322 + 12,3135
I VI = 2,4646264 2,3010300 4,7656564 2,6467304	VI = - 291,4918 - 93,4106	VI' = - 15,3417 - 3,0282
I VII = 2,1189260 2,3010300 4,4199560 2,7621424	VII = + 131,5001 + 38,0895	VII' = + 5,9773 + 2,9491
I VIII = 1,6578136	VIII = - 45,4793 - 7,3898	VIII' = - 1,8192 + 1,1299
	A a 3	I VIII

	Pro serie Q.	Pro serie Q'.
$\begin{array}{r} 1 \text{ VIII} = 1,6578136 \\ 2,3010300 \\ \hline 3,9588436 \\ 2,8640659 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{VIII} = -45,4793 \\ \hline -7,3898 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{VIII}' = -1,8192 \\ \hline +1,1299 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 \text{ IX} = 1,0947777 \\ 2,3010300 \\ \hline 3,3958077 \\ 2,9553135 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{IX} = +12,4388 \\ \hline +5,0490 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{IX}' = +0,4442 \\ \hline +1,5741 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 \text{ X} = 0,4404942 \\ 2,3010300 \\ \hline 2,7415242 \\ 3,0379043 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{X} = -2,7574 \\ \hline +2,2916 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{X}' = -0,0889 \\ \hline +1,4852 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 \text{ XI} = 9,7036199 \\ 2,3010300 \\ \hline 2,0046499 \\ 3,1133355 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XI} = +0,5054 \\ \hline +2,7970 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XI}' = +0,0149 \\ \hline +1,5001 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 \text{ XII} = 8,8913144 \\ 2,3010300 \\ \hline 1,1923444 \\ 3,1727474 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XII} = -0,0779 \\ \hline +2,7191 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XII}' = -0,0021 \\ \hline +1,4980 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 \text{ XIII} = 8,0195970 \\ 2,3010300 \\ \hline 0,3206270 \\ 3,2470286 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XIII} = +0,0105 \\ \hline +2,7296 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XIII}' = +0,0002 \\ \hline +1,4980 \\ \hline \end{array}$
$1 \text{ XIV} = 7,0735984$	$\begin{array}{r} \text{XIV} = -0,0012 \\ \hline +2,7284 \\ \hline \end{array}$	

§. 37. Inuentis igitur quatuor his valoribus:

$$P = + 0, 1734; Q = + 2, 7284$$

$$P' = + 0, 1631; Q' = + 1, 4980$$

colligimus inde ista producta:

$$P(1 + Q') = 0, 4331$$

$$QP' = 0, 4450$$

quorum posterius primum tantum superat particula  $= 0, 0119$ , quae differentia cum iam fit vehementer parua, et negativa, nobis iam manifesto declarat, valorem assumptum  $t = 200$  vix a valore vero discrepare, eumque aliquantillum superare, vnde superfluum foret accuratius in istum valorem inquirere: eius enim radix cubica tantum in computum ingreditur, quae a notabiliore errore litterae  $t$  vix sensibilem errorem gigneret. Hoc igitur numero  $t$  inuento, quem tamen tantillo minorem accipere conueniet, problema principale, quod hic nobis est propositum, perfecte resolvere poterimus.

## Problema.

§. 38. *Pro omnibus columnis cylindricis assignare maximam altitudinem, quam sustinere valent, antequam sub proprio pondere corruant.*

## Solutio.

Praesto fit columella, pariter cylindrica, ex eadem materia parata atque ipsae columnae, de quibus quaestio formatur; sit istius columellae altitudo  $= a$  eiusque amplitudo  $= d$ , atque per experimenta exploretur maximum onus, quod ista columella sine periculo fractionis sustinere valet

valet, cuius pondus repertum sit se habere ad proprium pondus columellae ut  $\lambda:1$ , ita ut iam  $\lambda$  sit numerus cognitus, quo inuento ponamus quaestionem institui circa columnnam ex eadem materia confectam, cuius amplitudo sit  $=bb$ , atque supra ostendimus maximam altitudinem

quaesitam esse  $b = a \sqrt[3]{\frac{\lambda bb}{\pi \pi d d}} \cdot t$ . Sumto iam  $t = 200$  erit  $l \frac{t}{\pi \pi} = 1,3067302$ , hincque  $\frac{1}{3} l \frac{t}{\pi \pi} = 0,4355767$ , cui respondet numerus  $2,7263$ , qui cum aliquantillum diminui debeat, eius loco scribamus numerum  $e$ , cuius logarithmus hyperbolicus  $= 1$ , quippe qui est  $2,71828$ , ita ut iam maxima altitudo quaesita sit  $b = 2,7183 \cdot a \sqrt[3]{\frac{\lambda bb}{d d}}$ , vel adeo in numeris rotundioribus statui poterit  $b = 2,70 \sqrt[3]{\frac{\lambda bb}{d d}}$ .

§. 39. Cum igitur antehac in determinatione oneris, quod quaevis columna gestare valet, nullam proprii ponderis rationem tenuissem, regula etiam, quam inde deduxeram, quadam leui correctione indigebit, quae autem tam erit exigua, ut in praxi tuto negligi queat. Ad quod ostendendum columnnam hic inuentam, quae sub proprio pondere occumbit, iuxta regulam ante datam examinemus, qua onera inuenta sunt tenere rationem duplicatam compositam ex directa amplitudinum seu basium et reciproca altitudinum. Hinc cum columellae pro modulo assumtae altitudo esset  $= a$ , amplitudo sine area baseos  $= d d$  et onus gestatum  $= \lambda a d d$ , ipsius autem columnnae inuentae amplitudo  $= b b$ , altitudo vero  $b = a \sqrt[3]{\frac{\lambda b b t}{\pi \pi d d}}$ , ponamus onus, quod haec columna iuxta regulam gestare posset  $= \xi b b b$ ; ubi  $b b b$  exhibet ipsum huius columnnae pondus.

dus. His positis, secundum nostram regulam esse deberet  
 $\lambda a d d : \xi b b b = \frac{d^4}{a^4} : \frac{b^4}{b^4}$  vnde deducitur  $\xi = \frac{\lambda a^4 b b}{b^4 d d}$ , et loco  
 $b^3$  substituto suo valore erit  $\xi = \frac{\pi \pi}{r}$ , hoc est circiter  $\xi = \frac{1}{20}$ ;  
 scilicet iuxta regulam haec columna sustineret partem vi-  
 gesimam proprii ponderis, dum reuera sub proprio ponde-  
 re succumbit.

§. 40. Vicissim ergo, quoties ista regula declarat,  
 columnam quampiam tantum vigesimam proprii ponderis  
 partem sustinere posse, tum concludere debemus, eam nul-  
 lum plane onus gestare posse, sed sub proprio pondere oc-  
 cumbere. Cum igitur nullae vnquam columnae adhiberi  
 soleant, nisi quae onera multo grauiora sustentare valeant,  
 manifestum est, errorem illius regulae nullius plane esse  
 momenti, atque in praxi tuto negligi posse, perinde ac si  
 proprium pondus nihil plane conferret, ad vim columna-  
 rum diminuendam, quemadmodum in prima de hoc argu-  
 mento differtatione est assertum.